

LOS METODOS DE LAS CARACTERISTICAS Y ELEMENTOS FINITOS EN PROPAGACION DE ONDAS.

Alvarez, R.; Molina, J.; Nowacki, W.K.; Alarcón, E.

E.T.S. Ingenieros Industriales. Universidad Politécnica de Madrid.
Universidad de Varsovia.

Resumen.— Se presentan a continuación algunas consideraciones acerca de la propagación de ondas en medios unidimensionales elásticos y viscoplásticos. El objetivo básico es la comparación entre diferentes modelizaciones del sistema establecidas siguiendo las técnicas de Elementos Finitos.

Como criterio comparativo se utilizan resultados obtenidos mediante el método de las características, que, para el caso descrito proporciona la solución más aproximada.

La justificación del trabajo radica en que las técnicas de Elementos Finitos son fácilmente generalizables a problemas bi o tridimensionales, mientras que las de características pierden rápidamente la ventaja de su simplicidad.

1. ECUACION CONSTITUTIVA DE UN MEDIO ELASTO/VISCOPLASTICO

El modelo mecánico para un material elasto/viscoplástico consiste en un amortiguamiento, colocado en paralelo con un elemento plástico, a los que se añade el correspondiente elemento elástico en serie; como se aprecia en la fig. 1.

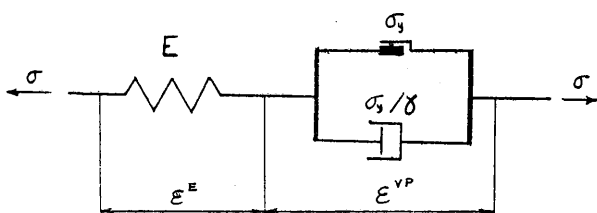


FIGURA 1. Modelo mecánico para un material elasto/viscoplástico.

De esta manera, la tasa de deformación total tiene una componente elástica y otra viscoplástica.

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^E + \dot{\epsilon}^{VP}$$

Esto es:

$$\dot{\epsilon} = \frac{\dot{\sigma}}{E} + \gamma < \frac{|\sigma|}{\sigma_y} - 1 > \text{signo } \sigma$$

Donde se ha empleado la siguiente notación:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \text{deformación total} \\ \epsilon^E &= \text{deformación elástica} \\ \epsilon^{VP} &= \text{deformación viscoplástica} \\ \sigma &= \text{tensión} \\ E &= \text{módulo de Young} \\ \gamma &= \text{coeficiente viscoplástico} \\ \sigma_y &= \text{tensión límite de fluencia} \\ \langle a \rangle &= \begin{cases} a & a > 0 \\ 0 & a \leq 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para la introducción de esta ecuación constitutiva en el análisis mediante elementos finitos, es preciso convertirla en una ecuación incremental:

$$\Delta \epsilon = \frac{\Delta \sigma}{E} + \gamma \Delta t < \frac{|\sigma + \frac{\Delta \sigma}{2}|}{\sigma_y} - 1 > \text{signo } \sigma$$

en la que se ha supuesto una variación lineal de σ a lo largo del incremento de tiempo con el fin de despejar el incremento de tensión:

$$\Delta \sigma = D_{ep} \Delta \epsilon - \Delta \sigma_0 \quad (1)$$

siendo:

$$D_{ep} = \frac{E}{1 + \frac{1}{2} \gamma \Delta t} \quad \text{módulo elastoplástico}$$

$$\Delta \sigma_o = \frac{K \sigma_y \Delta t \left(\frac{|\sigma|}{\sigma_y} - 1 \right) \text{ signo } \sigma}{1 + \frac{1}{2} K \Delta t} \quad \text{tensión aparente.}$$

$$K = \begin{cases} \frac{E_y}{\sigma_y} & |\sigma| > \sigma_y \\ 0 & |\sigma| \leq \sigma_y \end{cases} \quad \text{coeficiente elasto-plástico.} \quad (2)$$

2. APLICACION DEL MEF

2.1. FORMULACION DE LAS ECUACIONES

La ecuación de equilibrio para una barra de sección constante es:

$$\rho \ddot{u} - \frac{\partial \sigma}{\partial x} = f$$

donde:

ρ = densidad

u = desplazamiento

x = coordenada axial

f = fuerza externa volumétrica

Transformándola en una ecuación incremental y sustituyendo en ella la expresión (1) del apartado anterior, se obtiene una igualdad sobre la que aplicar el Principio de los Trabajos Virtuales:

$$\int_0^L \rho \Delta \ddot{u} \psi_i dx + \int_0^L (D_{ep} \Delta \varepsilon - \Delta \sigma_o) \psi_i' dx =$$

$$= \int_0^L \Delta f \psi_i dx$$

siendo $\psi_i(x)$ una función de desplazamiento arbitraria.

Reemplazando, por último, la deformación por su valor en función del desplazamiento y éste por su aproximación en combinación de funciones de forma, - esto es:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} \quad y \quad u = \sum_j u_j \psi_j$$

obtenemos:

$$\sum_j \Delta \ddot{u}_j \int_0^L \rho \psi_i \psi_j dx + \sum_j \Delta u_j \int_0^L D_{ep} \psi_i' \psi_j' dx = \int_0^L \Delta f \psi_i dx + \int_0^L \Delta \sigma_o \psi_i' dx$$

O bien, en forma matricial:

$$M_{\sim} \Delta \ddot{u}_{\sim} + K_{\sim ep} \Delta u_{\sim} = \Delta f_{\sim} + \Delta f_{\sim a} \quad (3)$$

Denotando $\Delta f_{\sim a}$ el vector de incrementos de fuerzas aparentes debidas a las deformaciones viscoplásticas.

Para el presente estudio, se han empleado funciones de desplazamiento lineales. Dentro de cada elemento de longitud $\bar{1}$ de la barra:

$$\psi_i = 1 - \frac{x}{\bar{1}}$$

$$\psi_j = \frac{x}{\bar{1}}$$

y las matrices elementales se obtienen - calculando las integrales señaladas:

$$M_{\sim}^e = \frac{\rho \bar{1}}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$K_{\sim ep}^e = \frac{D_{ep}}{\bar{1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Delta f_{\sim a}^e = \Delta \sigma_o \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Para obtener las matrices del sistema, se adicionan las matrices de todos los elementos en sus correspondientes - posiciones.

2.2. MASA CONSISTENTE Y MASA CONCENTRADA

Esta matriz elemental de masa obtenida en el apartado anterior se denomina consistente y es a veces sustituida por una matriz de masa concentrada:

$$M_{\sim}^e = \frac{\rho \bar{1}}{6} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Ambas matrices pueden ser recogidas por la expresión general:

$$M_{\sim}^e = \frac{\rho \bar{1}}{6} \left\{ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} + R \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \right\}$$

distinguiéndose los siguientes casos:

$R = 0$	masa concentrada
$R = 1$	masa consistente
$0 < R < 1$	masa consistente intermedia

El uso de un tipo u otro de matriz de masa debe basarse en el error que refleja en los resultados.

Si se estudian las oscilaciones - libres de una barra elástica de longitud L , con los extremos fijos por ejemplo, y para distintas condiciones iniciales de desplazamiento senoidal; se obtienen las sucesivas frecuencias naturales:

$$\omega_n = \frac{n\pi c}{L}$$

siendo n el número de semiondas en la barra y c la celeridad de onda.

El resultado de comparar estas frecuencias (ω_n) con las que satisfacen la ecuación planteada en N elementos finitos ($\bar{\omega}_n$) rinde la siguiente fórmula - (ver referencia [10]):

$$\frac{\bar{\omega}_n}{\omega_n} = \frac{\sin \frac{n\pi}{2N}}{\frac{n\pi}{2N} \sqrt{1 - \frac{2}{3} R \sin^2 \frac{n\pi}{2N}}}$$

que representamos en la fig. 2 para algunos valores de R :

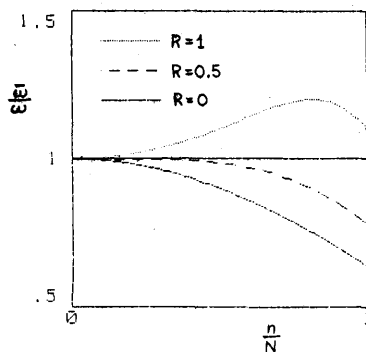


FIGURA 2: Relación frecuencia aproximada $\bar{\omega}_n$, a frecuencia real ω_n , en función del número de ondas adimensional.

2.3. METODO DE INTEGRACION

Se ha elegido el método llamado de Diferencias Centrales para la integración en el tiempo de las ecuaciones (3) atendiendo a su sencillez y amplia difusión.

Se trata de un método condicionalmente estable y, en este sentido, el incremento de tiempo elegido debe ser varias veces menor que el tiempo en que la onda recorre un elemento en el problema elástico.

Para su aplicación, partiendo de un instante de tiempo t en el que es conocido el estado del sistema, se plantea el siguiente sistema de ecuaciones a partir de (3):

$$M \frac{\Delta \ddot{u}}{\Delta t} = \Delta f_t + \Delta f_{at} - K_{ep} \frac{\Delta u}{\Delta t}$$

De donde es despejado $\Delta \ddot{u}_t$ que sirve para predecir:

$$\Delta u_{t+1} = \Delta \ddot{u}_t \Delta t^2 + 2\Delta u_t - \Delta u_{t-1}$$

Siguiendo la aproximación:

$$\ddot{a}_t = \frac{a_{t+1} - 2a_t + a_{t-1}}{\Delta t^2}$$

que da nombre al método de Diferencias Centrales.

Ahora se hace $u_{t+1} = u_t + \Delta u_t$ y se calcula en nuevo estado del sistema, incluidos Δf_{t+1} , Δf_{at} , y K_{ept+1} .

El paso al siguiente instante de tiempo es análogo.

2.4. ORGANIZACION DEL PROGRAMA

El programa realizado para la integración por elementos finitos en medios elasto-viscoplásticos unidimensionales consta de los siguientes segmentos:

1) Lectura de datos.

Se leen las características de la barra, el número de elementos y el tiempo de integración; así como la forma de las fuerzas externas.

2) Dimensionado de conjuntos.

Se reserva espacio para las siguientes matrices y vectores:

$$\begin{matrix} M & K_{ep} \\ \sim & \sim \\ u & \Delta u_{-1,0,1} & \Delta \ddot{u} & \Delta f \\ \sim & \sim & \sim & \sim \\ \sigma & K \\ \sim & \sim \end{matrix}$$

siguiendo la notación de los apartados anteriores.

3) Montaje de la matriz de masa.

4) Establecimiento de condiciones iniciales.

Se igualan a cero, o a otros valores, los vectores:

$$\begin{matrix} u & \Delta u_{-1} & \Delta u_0 & \sigma & K \\ \sim & \sim & \sim & \sim & \sim \end{matrix}$$

5) Integración.

Para cada instante de tiempo:

- Se monta la matriz de rigidez K_{ep} siguiendo la fórmula dada para cada elemento y teniendo en cuenta el valor del vector de coeficientes K .
- Se calcula el incremento de las fuerzas externas y se asigna a Δf .
- Se suma el incremento de fuerzas aparentes debidas al efecto viscoplastico al vector Δf . Para ello $\Delta \sigma$ es calculado en cada elemento a partir de q . Y el valor de q es inmediatamente actualizado sumándole $\Delta \sigma$ (expresión (1)). Se actualiza aquí también el valor de K - (expresión (2)).
- Se resta al vector de cargas f el producto $K_{ep} \Delta u_0$.
- Se resuelve el sistema $M \ddot{u} = \Delta f$.
- Se prevé el nuevo valor de la variable Δu , según la expresión:

$$\Delta u_1 = \ddot{u} \Delta t^2 + 2\Delta u_0 - \Delta u_{-1}$$

- Se actualizan: $u = u + \Delta u_0$

$$\Delta u_{-1} = \Delta u_0$$

$$\Delta u_0 = \Delta u_1$$

6) Grabación de resultados.

Estos pasos descritos, se resumen en la fig. 3.

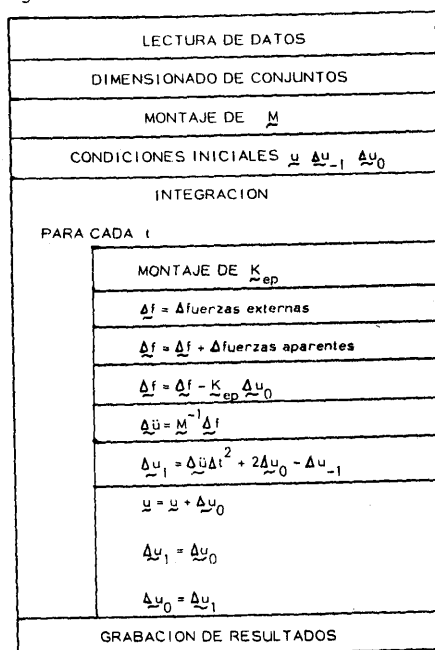


FIGURA 3: Partes del programa de elementos finitos.

El programa ha sido escrito en lenguaje BASIC y ejecutado en un ordenador personal para la obtención de los resultados expuestos.

3. EL METODO DE LAS CARACTERISTICAS

Se trata de un método de análisis de ecuaciones diferenciales que, en casos como los aquí tratados, aunan facilidad de programación con rapidez y exactitud.

Una descripción más amplia del método aplicado a la propagación de ondas puede encontrarse en la referencia [9].

Si, como caso particular, el medio es elasto/viscoplastico, es decir, si la viscosidad se presenta tan sólo en la parte plástica, y si no se supera la tensión de límite elástico, la solución proporcionada por el método es exacta a condición de que la malla recoja las variaciones de carga y geometría.

Las curvas de tensiones y deformaciones así obtenidas se utilizan como patrón de referencia y se muestran en la figura 5.

Por otra parte, y dejando de lado la exactitud de la solución, el método de las características presenta la ventaja de dar una interpretación muy clara del proceso de propagación de la onda.

Sea como ejemplo el de la figura 4.

Sobre el eje horizontal se representan, desde el origen hacia la derecha, las longitudes de las barras, y hacia la izquierda, los valores de la carga.

El eje vertical es el de tiempos.

La malla está formada por las líneas características, que, para el problema de propagación de ondas, son rectas.

Sobre ellas se translada la curva de carga manteniendo su forma (recuérdese que se está en el dominio elástico).

Al llegar a cada extremo la onda se refleja invirtiendo su signo, ya que se trata de extremos libres.

La sección AA' representa un corte de la malla a $x=\text{cte}$. Sobre éste se produce la historia de tensiones en la sección correspondiente de la barra.

Se comprueba el paso de la onda inicial (puntos I, II, III), de su reflejo en el extremo derecho de la barra (puntos I', II', III') y del nuevo reflejo en el extremo izquierdo (puntos I'', II'', III'').

El trazo más grueso corresponde a la suma algebraica sobre la sección.

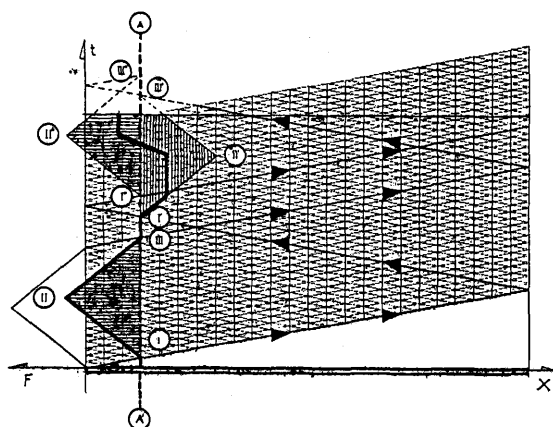


FIGURA 4. Método de las Características.

4. EJEMPLOS

A continuación se relacionan las características del problema considerado. Como se puede observar se trata de una barra de cobre que se somete a una ley de carga triangular.

El tipo de función de viscoplasticidad elegido es el propuesto por SOKOLOVSKI, y ello por tratarse de una ley lineal.

GENERAL DATA

TOTAL STUDY TIME..... .0001
NUMBER OF LINKS..... 1
NUMBER OF MATERIAL TYPES..... 1
NUMBER OF SPECIAL ELEMENTS..... 0
PROPOSED TIME INCREMENT..... 5.E-7
ALLOWED ERROR IN LENGTHS VALUES..... 1
FUNCTION TYPE..... SOKOLOVSKI
ALLOWED ERROR IN STRESS APROXIMATION (X)..... 5
NUMBER OF INTERPOLATION LOAD POINTS..... 3
LOAD APPLICATION NODE..... 1
ALLOWED ERROR IN LOAD VALUES..... 1

LOAD INTERPOLATION POINTS INPUT

POINT NUMBER	TIME VALUE	LOAD VALUE
1	0.0000E+00	0.0000E+00
2	5.0000E-05	1.0000E+04
3	1.0000E-04	0.0000E+00

MATERIALS PROPERTIES INPUT

MAT. NUM.	DENSITY	YOUNG M.	VS. COEF.	ST. YIELD	INIT. STR.
1	8.904E+03	1.177E+11	2.548E-05	5.000E+07	0.000E+00

LINKS PROPERTIES INPUT

LINK NUMBER	TYPE	LENGTH	AREA
1	1	2.400E-01	1.131E-04

GEOMETRICAL CONDITIONS AT THE ENDS

FREE ----- FREE

5. RESULTADOS Y CONCLUSIONES

En primer lugar se sometió a uno de los extremos de la barra a una carga triangular con valor tope inferior al límite elástico.

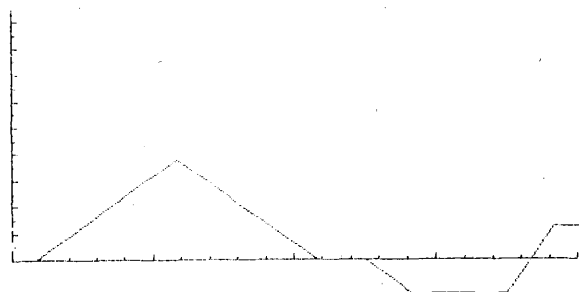


FIGURA 5. Historia de tensiones. M.C.

La figura 5 representa la historia en tensiones, obtenida por el método de las características, para una sección de la barra situada a 0,03 m del extremo en que se aplica la carga. Los valores obtenidos son teóricamente exactos.

La figura 6 representa los mismos resultados obtenidos, esta vez por el método de Elementos Finitos en la hipótesis de masa concentrada y utilizando 20 y 60 elementos respectivamente.

En este caso sencillo, en el que se trabaja en el campo elástico el método de las características resulta imbatible por su sencillez y facilidad de programación.

En lo que respecta al M.E.F., en general se obtienen mejores resultados en la hipótesis de masas concentradas.

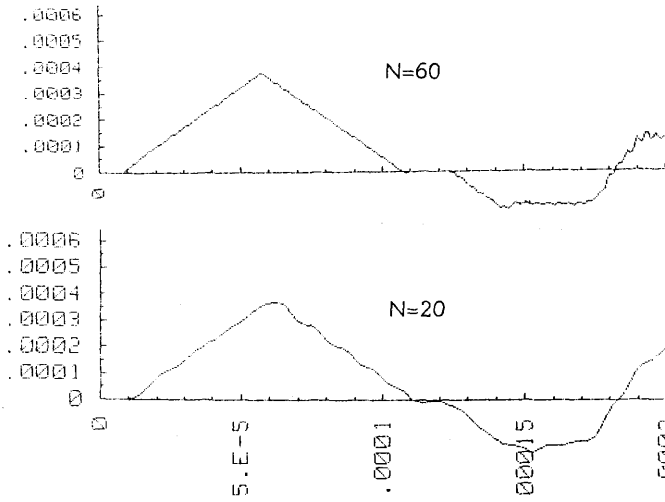


FIGURA 6. Historia de tensiones. M.E.F.

El segundo paso consistió en doblar el valor tope de la función de carga, - sobrepasando ya claramente el valor del límite elástico.

La figura 7 representa la historia de deformaciones, con la misma sección del caso anterior y obtenida mediante - el método de las características (7a) y de los Elementos Finitos (7b).

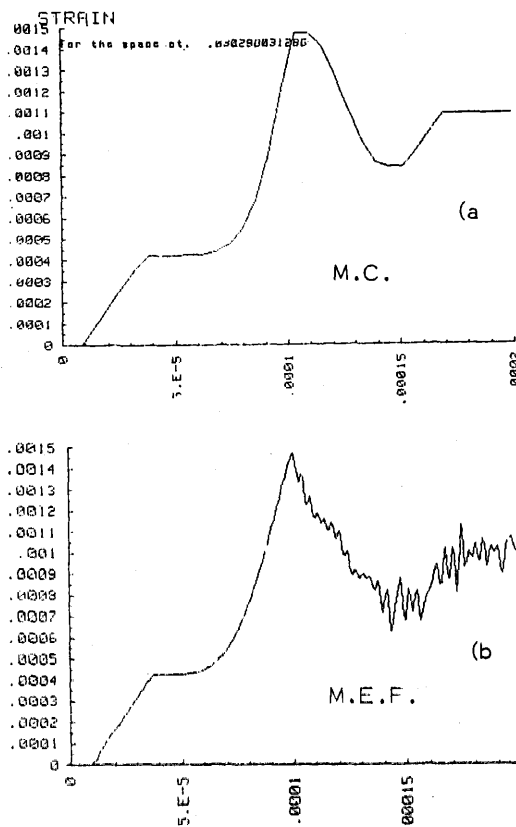


FIGURA 7. Historia de deformaciones.

Puede observarse la concordancia - total entre ambos resultados.

En este caso el método de las características pierde gran parte de las ventajas que presentaba en el dominio elástico, ya que se cae en un proceso usual de integración numérica (en el caso elástico las ecuaciones sobre las líneas características eran rectas y la integral exacta).

La discontinuidad observada en el - instante $t=4 \text{ E-}5$ obedece a la ruptura de la línea elástica en la ley bilineal correspondiente a la hipótesis de material plástico perfecto.

Esta hipótesis introduce por ello - inestabilidades en el proceso de integración.

Es por esto que se pensó en modificar los programas, a fin de que soportasen una ley estática tensión-deformación más "suave".

Se introdujo la presentada por la - referencia [11], figura 8, como correspondiente al cobre.

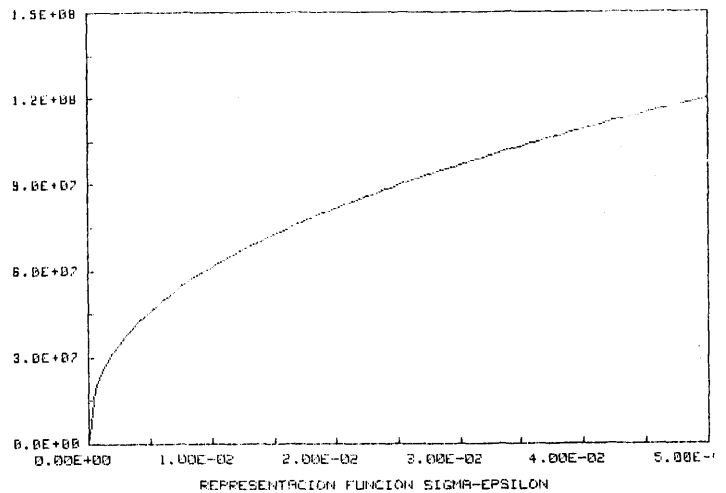


FIGURA 8. Ley plástica cuasiestática.

Los resultados conseguidos con la - nueva ley son los representados en la - figura 9 según el método de las características (9a) y Elementos Finitos (9b).

En ellas se representa la historia de deformaciones para secciones situadas a distintas distancias.

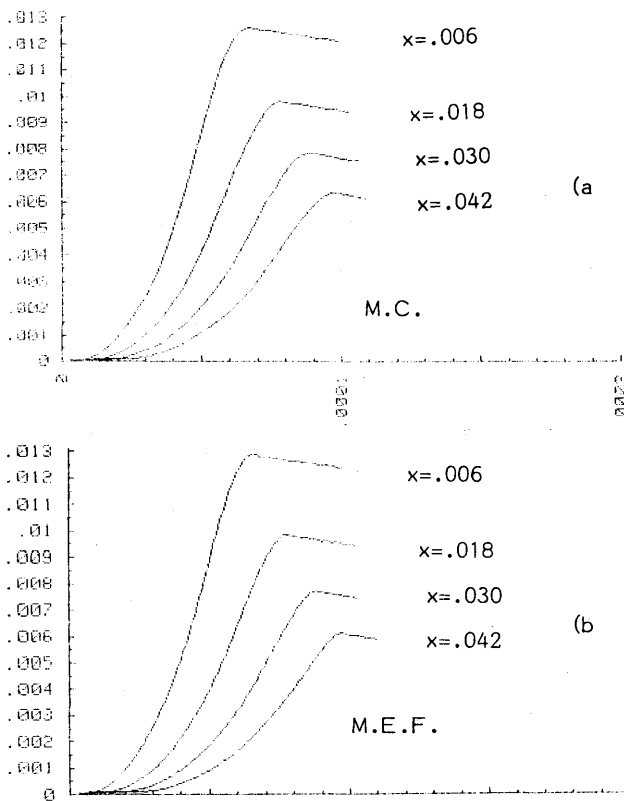


FIGURA 9: Historias de deformación.

REFERENCIAS

1. NOWACKI, W.K., "Stress waves in Non-Elastic Solids". Oxford. Ed. Pergamon Press, 1978.
2. NAGHDI, P.M. and MURCH, S.A., "On the Mechanical Behaviour of Viscoelastic/Plastic Solids". Techn. Report. Univ. California, 1963.
3. HOHENEMSER, K. and PRAGER, W., "Über die Ansätze der Mechanik Isotroper Kontinua". A. Angew. Math. Mech. - 1932, Vol. 12.
4. MALVERN, L.E., "The Propagation of Longitudinal waves of Plastic Deformations in a bar of Material Exhibiting a Strain Rate Effect". J. Appl. Mech, 1951, 18.
5. PERZYNA, P., "The Constitutive Equations for Rate Sensitive Plastic Materials". Appl. Math. 1963, 20.
6. PERZYNA, P., "The Constitutive Equations for Work-Hardening and Rate - Sensitive Plastic Materials". Proc. Vibr. Probl. 1963, 4,4.
7. JONAS A. ZUKAS, THEODORE NICHOLAS, HALLOCK F. SWIFT, LONGING B. GRESZCZUK and DONALD R. CURRAN., "Impact Dynamics". Ed. John Wiley & Sons. 1982.
8. KARL. F. GRAFF., "Wave Motion in - Elastic Solids". Ohio State University Press. 1975.
9. GALLEGO, J.; ALVAREZ, R.; NOWACKI, W.K.; ALARCON, E., "Aplicación del método de las características a problemas de impacto en medios viscoplásticos". 1^{er} Congreso Iberoamericano de Métodos Computacionales en Ingeniería. Madrid. 1985.
10. KEY, S.W., "Transient Response by - Time Integration: Review of Implicit and Explicit Operators". pp. 71-95.
11. YOKOYAMA, T.; TSUZUKI, M., "Finite Element Analysis of Plastic Wave Propagation in Tapered Bar". Technology Reports of the Osaka University. Vol. 31. No 1597, pp. 115-121.